Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2010

Meerkeuze vragenreeks

1. Pluto wordt sinds kort niet meer beschouwd als planeet. Dit is
a) omdat hij niet rond genoeg is
b) omdat hij zijn baan niet schoongeveegd heeft
c) zowel a en b
d) onzin

2. Vergeleken met je massa op aarde is je massa in de ruimte, ver van de sterren af
a) nul
b) verwaarloosbaar klein
c) hetzelfde
d) veel groter

3. Van energierijk naar energiearm, wat is de correcte volgorde van de volgende types elektromagnetische straling?
a) gammastraling, röntgenstraling, ultraviolet, optisch, infrarood, radio
b) radio, röntgenstraling, infrarood, gammastraling, ultraviolet, optisch
c) optisch, infrarood, radio, röntgenstraling, ultraviolet, gammastraling
d) radio, optisch, ultraviolet, infrarood, röntgenstraling, gammastraling

4. Waar/wanneer zijn de elementen H en He gevormd?
a) hebben altijd al bestaan
b) vlak na de oerknal
c) in sterren
d) op aarde

5. Waar/wanneer zijn de andere elementen lichter dan ijzer (Fe) gevormd?
a) vlak na de oerknal
b) in sterren
c) op aarde
d) tijdens supernova's

6. Waar/wanneer zijn de elementen gevormd die zwaarder zijn dan ijzer (Fe)?
a) op aarde.
b) in supernova's
c) in planetaire nevels
d) in emissienevels

7. We kunnen alleen dingen uit het verleden waarnemen omdat
a) het tijd kost om de waarnemingen te verwerken
b) de lichtsnelheid eindig is
c) het heelal heel oud is
d) onze telescopen nog niet groot genoeg zijn

8. De 'terugkijktijd' (look-back time) van een object is het verschil tussen de tijd waarop een object straling uitzendt, en de tijd waarop we het waarnemen (nu)) Wat beïnvloedt zeker niét de terugkijktijd van een object?
a) de afstand van het object
b) de lichtsnelheid

c) de uitdijingssnelheid van het heelal
d) de golflengte van het licht

9. Vergeleken met nu had de Melkweg 3 miljard jaar geleden
a) meer gas in de schijf
b) meer sterren in de halo (bol om de schijf heen)
c) meer metaalrijke sterren
d) geen zonnestelsel

10. Veronderstel dat astronauten ergens op de Maan landen op het ogenblik dat het voor aardbewoners nieuwe maan is) Welke van volgende uitspraken zou dan waar zijn?
a) De Aarde zou er voor de astronauten vol uitzien (althans daar waar ze te zien is).
b) De landingsplaats zou kunnen baden in het zonlicht.
c) De landingsplaats zou volledig donker kunnen zijn.
d) De drie bovenstaande uitspraken zijn waar.
e) Geen enkele van de bovenstaande uitspraken is waar.

11. Als het equatorvlak van de Aarde niet geheld zou zijn ten opzichte van de ecliptica,
a) dan zou de tijd die de Zon zich dagelijks boven de horizon bevindt het hele jaar door even lang zijn.
b) dan zouden er geen seizoenen zijn op Aarde.
c) dan zouden op de polen geen nachten van zes maanden lang voorkomen.
d) dan zijn de drie bovenstaande uitspraken waar.
e) dan is geen enkele van bovenstaande uitspraken waar.

12. Als je op Jupiter zou leven, welke van de volgende planeten zou je dan om middernacht hoog aan de hemel kunnen zien staan (in de veronderstelling dat de hemel helder zou zijn en dus ook sterren zichtbaar zouden zijn)?
a) Alleen Mercurius en Venus.
b) Alleen Mercurius, Venus, de Aarde en Mars.
c) Alle planeten van het zonnestelsel behalve Mercurius en Venus (en uiteraard Jupiter zelf).
d) Alle planeten van het zonnestelsel behalve Mercurius, Venus, de Aarde en Mars (en uiteraard Jupiter zelf).

13. Stel dat er een object in het zonnestelsel zou gevonden worden dat een elliptische baan rond de Zon beschrijft met een periode van 6 jaar. Wat zou dan de gemiddelde afstand tot de Zon zijn van dit object?
a) ongeveer 2 astronomische eenheden.
b) ongeveer 3,3 astronomische eenheden.
c) 6 astronomische eenheden.
d) ongeveer 9 astronomische eenheden.
e) 36 astronomische eenheden.

14. Welke van volgende planeten kan vanaf de Aarde (soms) als sikkelvormig waargenomen worden?
a) Mercurius.
b) Venus.
c) Mars.
d) Twee van de hiervoor genoemde planeten.
e) Zowel Mercurius, Venus als Mars.

15. De massa van de Maan bedraagt ongeveer 1/81 van de massa van de Aarde. Als je je echter op de Maan zou bevinden, dan zou je maar ongeveer 1/6 zoveel wegen als op Aarde. Waarom weeg je op de Maan meer dan 1/81 dan op Aarde?
a) De Maan is opgebouwd uit andere materialen dan de Aarde.
b) De Maan heeft een andere dichtheid dan de Aarde.
c) De Maan heeft geen atmosfeer en de Aarde wel.

d) De Maan is veel kleiner dan de Aarde.
e) Zowel antwoord a als antwoord b.

16. Welk spectrum wordt geproduceerd wanneer wit licht schijnt doorheen een koel gas?
a) Een absorptiespectrum.
b) Een continu spectrum.
c) Een emissiespectrum.
d) Elk van bovenstaande spectra.
e) Geen enkele van bovenstaande spectra.

17. Het dopplereffect wordt gebruikt om
a) de radiële snelheid van een ster te meten.
b) dubbelsterren te detecteren en te bestuderen.
c) de rotatie van de Zon te meten.
d) twee van bovenstaande.
e) alle bovenstaande.

18. Geluidsgolven kunnen zich niet voortplanten in een vacuüm. Hoe kunnen radiogolven dan toch door de interstellaire ruimte reizen?
a) Het zijn extra krachtige geluidsgolven.
b) Het zijn geluidsgolven met een zeer hoge frequentie.
c) Radiogolven zijn helemaal geen geluidsgolven.
d) Dit is een strikvraag, want radiogolven reizen helemaal niet door de interstellaire ruimte.
e) De interstellaire ruimte is geen vacuüm.

19. In welk aspect lijkt Mars het minst op de Aarde?
a) de helling van zijn equator op zijn baanvlak.
b) de rotatieperiode.
c) dat het oppervlak van Mars niet hard is.
d) zijn atmosfeer.

20. De chemische samenstelling van Jupiter lijkt het best op die van
a) de Aarde.
b) de Zon.
c) Mars.
d) de Maan.
e) Venus.

21. Hoewel Titan niet veel groter is dan Mercurius, is deze satelliet van Saturnus toch in staat om een atmosfeer vast te houden, omdat
a) Titan zich dicht bij Saturnus bevindt.
b) Titan een grote dichtheid heeft.
c) Titan vrij ver van Saturnus af staat.
d) Titan zich op grote afstand van de Zon bevindt.
e) Drie van bovenstaande redenen.

22. De totale lichtkracht van de Zon kan berekend worden uit volgende grootheden:
a) de rotatieperiode en de temperatuur van de Zon.
b) de rotatieperiode en de diameter van de Zon.
c) de diameter van de Zon en de afstand van de Zon tot de Aarde.
d) de diameter van de Zon en de hoeveelheid ontvangen zonne-energie op de afstand van de Aarde.
e) de afstand van de Zon tot de Aarde en de hoeveelheid ontvangen zonne-energie op de afstand van de Aarde.

23. Voor volgende drie vragen gebruiken we onderstaande tabel

Ster	Schijnbare magnitude	Absolute magnitude	Afstand (in parsec)
Sirius	–1,5		2,7
Wega	0,0	0,5	
Antares	0,9	–5,1	160,0
Fomalhaut	1,15		6,9

Welke ster lijkt het zwakst voor een waarnemer op Aarde?
a) Sirius
b) Wega
c) Antares
d) Fomalhaut
e) Het antwoord kan niet uit de gegeven informatie afgeleid worden.

24. Wat is ongeveer de afstand van Wega?
a) 4,2 parsec
b) 8,1 parsec
c) 11,7 parsec
d) 26,7 parsec
e) De gegeven informatie volstaat niet om uit de voorgestelde alternatieven te kiezen.

25. De absolute magnitude van Fomalhaut bedraagt ongeveer
a) 0,75
b) 2
c) 12
d) –2
e) –0,75

26. Waarom raken zware sterren eerder zonder waterstof in hun kern dan lichtere sterren?
a) De waterstof fuseert sneller (i.e. wordt sneller in helium omgezet) ten gevolge van de hogere druk in het inwendige van de ster.
b) Er bevindt zich minder waterstof in de kern van een zware ster.
c) De kernen van lichtere sterren bevatten een groter percentage helium, waardoor de fusie van waterstof vertraagt.
d) De kernen van lichtere sterren bevatten een kleiner percentage helium, waardoor de fusie van waterstof vertraagt.
e) De uitspraak is vals: zware sterren raken niet sneller zonder waterstof dan lichtere sterren.

27. De theorie voorspelt dat een neutronenster snel moet roteren, omdat
a) de neutronenster een grotere snelheid heeft gekregen door de supernova explosie.
b) de neutronenster een grotere snelheid heeft gekregen door een begeleidende ster.
c) de neutronenster dezelfde massa behoudt wanneer ze ineenvalt.
d) de neutronenster hetzelfde hoekmoment behoudt wanneer ze ineenvalt.
e) De uitspraak klopt niet: er wordt helemaal niet voorspeld dat neutronensterren snel rond hun as draaien.

28. Welk van volgende soorten objecten hebben de kleinste dichtheid?
a) hoofdreekssterren
b) nevels
c) pulsars
d) rode reuzen
e) witte dwergen

29. Als sterrenstelsel X zich vier keer verder van ons bevindt dan sterrenstelsel Y, dan is volgens de wet van Hubble, de verwijderingssnelheid van stelsel X
a) 16 keer groter dan die van stelsel Y.
b) 4 keer groter dan die van stelsel Y.
c) 2 keer groter dan die van stelsel Y.
d) 1,6 keer groter dan die van stelsel Y.
e) niet zomaar te vergelijken met de verwijderingssnelheid van stelsel Y.

30. Het feit dat quasars kleine afmetingen hebben, valt af te leiden uit
a) de hoeveelheid energie die ze vrijgeven.
b) hun afstand tot ons.
c) de snelheid van variatie van hun helderheid.
d) een vergelijking met Cepheide veranderlijken.
e) de grootte van hun blauwverschuiving.

1.	B
2.	C
3.	A
4.	B
5.	B
6.	B
7.	B
8.	D
9.	A
10.	D

11.	D
12.	D
13.	B
14.	D
15.	D
16.	A
17.	E
18.	C
19.	D
20.	B

21.	D
22.	E
23.	D
24.	B
25.	B
26.	A
27.	D
28.	B
29.	B
30.	C

Open vragenreeks I: Telescopen

a) Vergelijk het lichtverzamelend vermogen van een kleine telescoop met een objectieflens met een diameter van 10 centimeter, met dat van het menselijk oog dat volledig aan het donker is aangepast met een pupildiameter van 5 millimeter.

De oppervlakte van een cirkel is evenredig met het kwadraat van zijn diameter. We moeten dus de oppervlaktes van beide lenzen vergelijken. Uiteraard moeten de afmetingen wel in dezelfde eenheden gezet worden (bijvoorbeeld millimeter). Dan bekomen we $\frac{\pi(100/2)^2}{\pi(5/2)^2} = \frac{100^2}{5^2} = 400$

Deze telescoop verzamelt dus 400 keer meer licht dan het blote oog.

b) Welke van de volgende telescopen heeft het grootste lichtverzamelend vermogen?

Telescoop	Brandpuntsafstand van het oculair	Branpuntsafstand van het objectief	Diameter van het objectief
Telescoop 1	24 mm	150 cm	12 cm
Telescoop 2	6 mm	100 cm	8 cm
Telescoop 3	18 mm	125 cm	20 cm
Telescoop 4	12 mm	90 cm	6 cm
Telescoop 5	12 mm	100 cm	10 cm

Het lichtverzamelend vermogen wordt bepaald door de oppervlakte van het objectief (en dus door de diameter). Telescoop 3 kan dus meest licht verzamelen.

c) Welke van bovenstaande telescopen heeft de grootste vergroting?

De vergroting wordt bekomen door de brandpuntsafstand van het objectief te delen door de brandpuntsafstand van het oculair. Beide moeten uiteraard wel in dezelfde eenheden staan.
We bekomen volgende resultaten:

Telescoop	Vergroting
Telescoop 1	62,5 x
Telescoop 2	166,7 x
Telescoop 3	69,4 x
Telescoop 4	75,0 x
Telescoop 5	83,3 x

De grootste vergroting wordt dus verkregen met telescoop 2.

d) Veronderstel dat je beschikt over lenzen met volgende brandpuntsafstanden:
30 centimeter
10 centimeter
3 centimeter
Indien je een telescoop zou willen construeren met een zo groot mogelijke vergroting, welke twee lenzen zou je dan gebruiken? Welke als objectief en welke als oculair?

Zoals hoger vermeld, vergroting wordt bekomen door de brandpuntsafstand van het objectief te delen door de brandpuntsafstand van het oculair. Bijgevolg wordt een zo groot mogelijke vergroting verkregen door de brandpuntsafstand van het objectief zo groot mogelijk te nemen en de de brandpuntsafstand van het oculair zo klein mogelijk te nemen. We nemen dus de lens met 30 cm brandpuntsafstand als objectief en deze met 3 cm brandpuntsafstand als oculair.

e) Wat zou de vergroting zijn van de zopas geconstrueerde telescoop?

De vergroting bedraagt dan 30 / 3 = 10 keer.

Open vragenreeks II: Golflengte – Eigenbeweging

a) De golflengte van een van de meest prominente spectraallijnen van waterstof bedraagt 656,285 nanometer (dit is in het rode deel van het spectrum). In het spectrum van Regulus (de helderste ster van het sterrenbeeld Leeuw) nemen we deze spectraallijn waar op een golflengte die 0,0077 nanometer langer is. Bereken de relatieve snelheid van Regulus ten opzichte van de Aarde (langs de gezichtslijn) en bepaal of Regulus naar ons toe komt of zich van ons weg beweegt.

Aangezien de waargenomen golflengte van de spectraallijn *langer* is, kunnen we meteen besluiten dat Regulus zich van ons weg beweegt. Om de verwijderingssnelheid te berekenen, gebruiken we de formule voor het dopplereffect:

$$v = c\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right) = (3\cdot 10^8\, m/s)\times\left(\frac{0{,}0077\,nm}{656{,}285\,nm}\right) = 3500\,m/s$$

Regulus verwijdert zich dus van de Aarde aan een snelheid van 3,5 km/s.

b) De ster van Barnard heeft een eigenbeweging van 10,3 boogseconden per jaar en bevindt zich op een afstand van 1,82 parsec. Door gebruik te maken van het dopplereffect kunnen we vaststellen dat de radiële snelheid van de ster –111 kilometer per seconde bedraagt. Bereken de ruimtelijke snelheid van de ster van Barnard.

We beschouwen de afgelegde afstand per jaar als een stukje van een cirkel, en houden rekening met het feit dat 1 radiaal overeenkomt met 206265”. Derhalve kunnen we de afgelegde afstand in een jaar berekenen als:

$$\frac{10{,}3''/\,jaar}{206265}\times 1{,}82\,pc$$

Nu is 1 parsec (1 pc) gelijk aan 206265 astronomische eenheden (AE) en een astronomische eenheid is ongeveer $1{,}5\cdot 10^8$ kilometer. Verder telt een jaar ongeveer $3{,}15\cdot 10^7$ seconden.
De transversale (of tangentiële) snelheid van de ster van Barnard kan dan berekend worden als

$$\frac{10{,}3''/\,jaar}{206265}\times 1{,}82\,pc\times 206265\,\frac{AE}{pc}\times\frac{1{,}5\cdot 10^8\,km/AE}{3{,}15\cdot 10^7\,s/\,jaar} = 89\,km/s$$

De ruimtelijke snelheid kan berekend worden uit de radiële en de tangentiële snelheid samen, als

$$\sqrt{89^2+111^2}\,km/s = 142\,km/s$$

Open vragenreeks III: Sterrenstelsels

a) Veronderstel dat we kunnen waarnemen dat een bepaald deel van een extragalactisch sterrenstelsel roteert met een snelheid van 250 kilometer per seconde op een afstand van 40000 lichtjaar van het centrum van dit sterrenstelsel. Hoe groot is de omloopperiode van dat deel van het sterrenstelsel?

Aannemende dat de baan cirkelvormig is, wordt een omtrek beschreven van

$$2\pi \cdot 40000lj = 2\pi \times 3{,}8 \cdot 10^{17}\,km = 2{,}4 \cdot 10^{18}\,km$$

Dit traject wordt afgelegd aan een snelheid van 250 km/s, zodat de benodigde tijd gevonden kan worden uit

$$\frac{2{,}4 \cdot 10^{18}\,km}{250\,km/s} = 9{,}6 \cdot 10^{15}\,s = 3 \cdot 10^{8}\ jaar$$

b) Gebruik het resultaat van de vorige vraag om de totale massa van het sterrenstelsel te berekenen binnen een straal van 40000 lichtjaar van het centrum.

Als we de omloopperiode P uitdrukken in jaar en de afstand a tot het centrum in astronomische eenheden, dan kan de massa (uitgedrukt in zonsmassa's) gevonden worden uit de derde wet van Kepler:

$$M = \frac{a^3}{P^2}$$

Nu is een lichtjaar $9{,}46 \cdot 10^{15}$ meter en is een astronomische eenheid $1{,}5 \cdot 10^{11}$ meter, zodat een lichtjaar ongeveer 63000 astronomische eenheden is. Daaruit volgt

$$M = \frac{(40000 \times 63000)^3}{(3 \cdot 10^8)^2} = 1{,}78 \cdot 10^{11}$$

In dit eenvoudig model zou de massa binnen de gegeven straal dus ongeveer 178 miljard zonsmassa's bedragen.

c) Uit de roodverschuiving van een erg zwakke bron leiden we af dat de verwijderingssnelheid ervan 120000 kilometer per seconde bedraagt. In de veronderstelling dat de wet van Hubble op dit object van toepassing is, bereken dan de afstand ervan.

De wet van Hubble geeft een relatie tussen de verwijderingssnelheid v en de afstand d van een object:

$$v = H_0 d$$

waarbij de evenredigheidsconstante H_0 de parameter van Hubble wordt genoemd. Tegenwoordig neemt men ongeveer een waarde H_0 = 71 km/s/Mpc (1 Mpc = 10^6 parsec).
Aldus vinden we voor de afstand van het object:

$$d = \frac{v}{H_0} = \frac{120000\,km/s}{71\,km/s/Mpc} = 1690\,Mpc$$

of ongeveer 5,5 miljard lichtjaar.
Merk op dat er een onzekerheid is op de parameter van Hubble en dat dit uiteraard zijn invloed heeft op de bekomen resultaten.

Open vragenreeks IV: Zwarte gaten

Vraag 1

a) Het bestaan van een supermassief zwart gat is minder exotisch dan wel eens wordt gedacht. De gemiddelde dichtheid van een object wordt bepaald door de verhouding van zijn massa tot zijn volume. Wat is de formule voor de gemiddelde dichtheid van een bolvormig object met straal R en massa M?

Het volume V van een bol met straal R kan berekend worden als $V = 4\pi R^3/3$.
Derhalve is de dichtheid ρ te schrijven als

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

b) Druk de straal R uit in kilometer en de massa M in zonsmassa's. Hoe kan de vorige formule dan herschreven worden?

De massa $M_\odot$ van de Zon bedraagt $M_\odot = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg.
Als we nu de massa M_* uitdrukken in zonsmassa's en de straal R_* in kilometer, dan bekomen we

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{3 \times 1{,}989 \cdot 10^{30} M_*}{4\pi (1000 R_*)^3} = 4{,}8 \cdot 10^{20} \frac{M_*}{R_*^3}$$

c) De straal R van een zwart gat (in kilometer) en de massa M ervan (in zonsmassa's) staan met elkaar in verband via de formule van Schwarzschild:

$$R = 3\,M$$

Toon aan dat de dichtheid die nodig is om een zwart gat van massa M (in zonsmassa's) te verkrijgen, kan geschreven worden als:

$$1{,}8 \times 10^{19} / M^2 \ \ \mathrm{kg/m^3}$$

Als we in de eerder bekomen uitdrukking voor ρ de substitutie $R_* = 3\,M_*$ doorvoeren, dan bekomen we

$$\rho = 4{,}8 \cdot 10^{20} \frac{M_*}{R_*^3} = 4{,}8 \cdot 10^{20} \frac{M_*}{(3M_*)^3} = \frac{1{,}8 \cdot 10^{19}}{M_*^2}$$

waarbij ρ dan is uitgedrukt in SI-eenheden.

d) Welke dichtheid is nodig om een zwart gat van een miljard zonsmassa's te maken?

Stellen we $M_* = 10^9$ dan bekomen we $\rho = 18$ kg/m^3.

e) Welke dichtheid is nodig om een zwart gat van honderd miljoen zonsmassa's te maken?

Stellen we $M_* = 10^8$ dan bekomen we $\rho = 1800$ kg/m^3.
Merk op dat de dichtheid van water 1000 kg/m^3 bedraagt.

Vraag 2

a) Stel dat de zon opeens in een zwart gat verandert. Wat is het gevolg hiervan voor de beweging van de aarde rond de zon?

In het (hypothetisch) geval dat de zon instantaan in een zwart gat verandert, heeft dit geen enkele invloed op de rotatie van de aarde rond de zon (of beter, rond hun gemeenschappelijk massamiddelpunt). De massa van beiden en de afstand tussen hun respectieve massa-middelpunten verandert namelijk niet, waardoor de wetten van Kepler die hun beweging beschrijven ongewijzigd blijven. Meer fundamenteel gezien blijft de kracht door beide lichamen op elkaar uitgeoefend volgens de gravitatiewet van Newton dezelfde, en dus ook hun hieruit volgende beweging via Newtons tweede wet. In tegenstelling wat veelal gedacht wordt, zou de aarde dus niet door het zwart gat opgeslokt worden. Uiteraard zou leven wel onmogelijk worden door de afwezigheid van licht en warmte.

b) Leg uit waarom de vorige vraag hypothetisch was, en de zon in werkelijkheid nooit een zwart gat kan worden.

Om uiteindelijk in een type II supernova tot een zwart gat te kunnen ineen storten, moet de kern van een ster eerst de opeenvolgende fasen van kernfusie ondergaan hebben, en een kern gevormd hebben die hoofdzakelijk uit ijzer bestaat. Enkel zeer massieve sterren kunnen een voldoende hoge temperatuur bereiken in de kern om al deze processen achtereenvolgens te laten plaatsvinden. Sterren zoals de zon zullen, eenmaal ze een kern hebben bestaande uit koolstof en zuurstof, niet voldoende gravitatiekracht hebben om deze genoeg te doen samentrekken om aan de volgende kernreactie te beginnen. Zij blijven dus achter met deze (uitdovende) kern: een koolstof-zuurstof witte dwerg.

Open vragenreeks VI: Dubbelsterren

In een dubbelstersysteem roteren twee sterren rond hun gemeenschappelijk massamiddelpunt. Beschouw ster 1, die een massa heeft van 3.6 $M_\odot$, een straal van 2.3 $R_\odot$ en een temperatuur van 12000 K, en ster 2, die een massa heeft van 0.79 $M_\odot$, een straal van 3.0 $R_\odot$ en een temperatuur van 4500 K. Het systeem staat 93 lichtjaar van ons af en de afstand tussen de sterren onderling bedraagt 0.062 astronomische eenheden. Beiden beschrijven een cirkelvormige baan in een vlak dat een hoek van 98° (= inclinatie) maakt met de verbindingslijn aarde-dubbelster.

Vraag 1: Mechanica

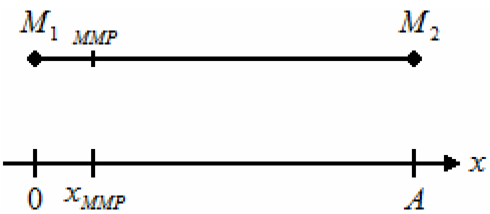
a) Op welke afstand van het centrum van ster 1 bevindt zich het massamiddelpunt van het systeem?

De volgende gegevens zijn bekend:

$M_1 = 3.6\ \mathrm{M_{zon}}$

$M_2 = 0.79\ \mathrm{M_{zon}}$

$A = 0.062\ \mathrm{AE}$



De positie van het massamiddelpunt (MMP) wordt gegeven door:

$$x_{MMP} = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2} = \frac{0 + M_2 A}{M_1 + M_2} = 0.011\ \mathrm{AE}$$

b) Wat is de duur van één rotatieperiode?

De duur van één periode wordt gevonden via de derde wet van Kepler:

$$\frac{P^2}{4\pi^2} = \frac{A^3}{G\left(M_1 + M_2\right)}$$

$$\Rightarrow P^2\left[\mathrm{d}\right] = 1.34 \cdot 10^5 \frac{A^3\left[\mathrm{AE}\right]}{\left(M_1\left[\mathrm{M_{zon}}\right] + M_2\left[\mathrm{M_{zon}}\right]\right)}$$

$$\Rightarrow P = 2.7\ \mathrm{d}$$

c) Wat is de baansnelheid van ster 2?

De baansnelheid van ster 2 wordt gevonden door te kijken welke afstand deze gedurende één rotatieperiode aflegt (met   de afstand van ster 2 tot het MMP):

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r_2}{P} = \frac{2\pi\left(0.062 - 0.011\right)\ \mathrm{AE}}{\left(2.70 \cdot 86400\right)\ \mathrm{s}} = 200\ \mathrm{km/s}$$

d) Wat is het traagheidsmoment van dit dubbelstersysteem?

Het inertiemoment van het systeem kan met de reeds berekende parameters onmiddellijk uit de formule (voor een discreet systeem) gevonden worden:

$$I = \sum mr^2 = M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2$$
$$= 0.0025 \text{ M}_{\text{zon}} \text{ AE}^2$$
$$= 5.6 \cdot 10^{49} \text{ kg m}^2$$

e) Wat is de ontsnappingssnelheid van ster 1 (verwaarloos hierbij de invloed van ster 2)?

De ontsnappingssnelheid wordt gevonden uit de massa en straal van de betrokken ster:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_1}{R_1}} = 770 \text{ km/s}$$

Vraag 2: Eclipserende dubbelster

a) Wat is de totale (door beide sterren en in alle richtingen) uitgestraalde lichtkracht?

De totale lichtkracht van een ster (verondersteld als een zwartlichaam) wordt gegeven door:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

met σ de Stefan-Boltzmannconstante

Dit levert in ons geval:

$$L_1 = 3.79 \cdot 10^{28} \text{ W} = 98.3 \text{ L}_{\text{zon}}$$
$$L_2 = 1.27 \cdot 10^{27} \text{ W} = 3.31 \text{ L}_{\text{zon}}$$
$$\Rightarrow L_{tot} = 3.91 \cdot 10^{28} \text{ W} = 102 \text{ L}_{\text{zon}}$$

b) Indien beide sterren vanuit ons standpunt gezien naast elkaar zichtbaar zijn, wat is dan de schijnbare lichtkracht van het totale systeem (verwaarloos extinctie en bolometrische correcties)?

Indien beide sterren naast elkaar zichtbaar zijn, wordt de schijnbare lichtkracht ℓ (en dus ook de schijnbare magnitude m) gevonden door de bekomen totale lichtkracht te vergelijken met die van de zon (schijnbare magnitude –26,74), uiteraard rekening houdend met het verschil in afstand d:

$$\ell = \frac{L_{tot}}{L_{zon}} \left(\frac{d_{\text{zon}}}{d} \right)^2 = 2.95 \cdot 10^{-12} \text{ L}_{\text{zon}}$$
$$m = m_{zon} - 2.5 \log \ell = 2.08$$

c) Met hoeveel procent neemt deze af <u>indien</u> ster 1 <u>volledig</u> zou verduisterd worden door ster 2?

Als ster 1 volledig verduisterd is, dan blijft enkel   over. Analoog aan het vorige levert dit als schijnbare lichtkracht en magnitude:

$$\ell = \frac{L_2}{L_{zon}} \left(\frac{d_{\text{zon}}}{d} \right)^2 = 9.62 \cdot 10^{-14} \text{ L}_{\text{zon}}$$
$$m = m_{zon} - 2.5 \log \ell = 5.80$$

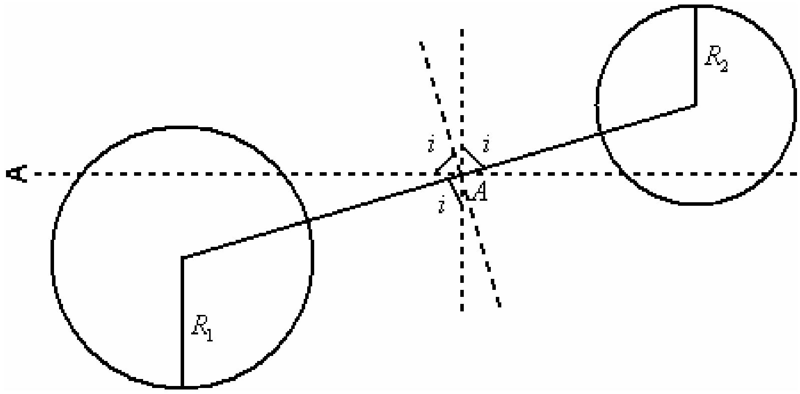
De schijnbare lichtkracht is dus met 96.7 % afgenomen.

d) Met welke magnitudeverandering komt dit overeen?

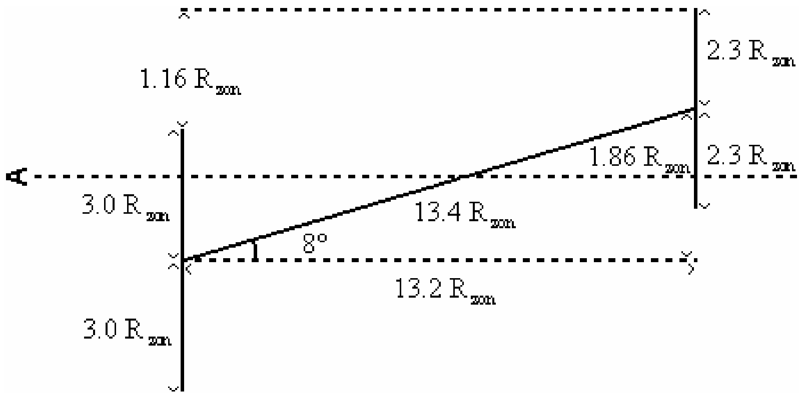
Uit (c) volgt onmiddellijk dat het magnitudeverschil 3.72 bedraagt.

e) Maak aan de hand van een schets een schatting van de magnitudeverandering in werkelijkheid, dit wil zeggen met de gegeven inclinatiehoek.

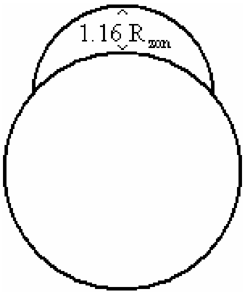
Deze vraag was zeer uitdagend. Om te weten hoeveel procent van het oppervlak van ster 1 in werkelijkheid verduisterd wordt, moeten we eerst vinden hoeveel procent van diens diameter bedekt wordt. Dit kan zoals gezegd met behulp van een schets:



Door gebruik te maken van de gekende stralen, onderlinge afstand en inclinatiehoek (dat deze groter is dan 90° geeft informatie over de rotatiezin van het systeem, maar heeft geen invloed op de geometrie van het probleem) kunnen achtereenvolgens de componenten van de onderlinge afstand langs en loodrecht op de gezichtslijn bepaald worden, evenals uiteindelijk de fractie van de diameter van ster 2 die vanuit het standpunt van de waarnemer onbedekt blijft:



Het besluit is dus dat bij maximale verduistering 1,16 R_{zon} van de diameter van ster 2 (4,6 R_{zon}) onbedekt blijft, dit is met andere woorden een verduistering met magnitude 0.748:



Nu moeten we bepalen hoeveel procent van de oppervlakte in deze situatie bedekt is. Dit is een vrij geavanceerd (geometrisch-wiskundig) probleem, waar gelukkig simulaties voor bestaan (meestal in de context van zonsverduisteringen). Een erg bruikbare is terug te vinden op *http://www.geoastro.de/eclipse/index.html*. Deze leert ons dat, met de gevonden verhouding van stralen en eclipsmagnitude, een obscuratie van 72.5 % optreedt. De laatste stap is het opnieuw uitvoeren van vraag (c) en (d), maar dit keer met een afname van 72.5 % i.p.v. 100% in de lichtkracht van ster 1:

$$\ell = \frac{0.275 L_1 + L_2}{L_{zon}} \left(\frac{d_{\mathrm{zon}}}{d} \right)^2 = 8.83 \cdot 10^{-13} \ \mathrm{L_{zon}}$$

$$m = m_{zon} - 2.5 \log \ell = 3.40$$

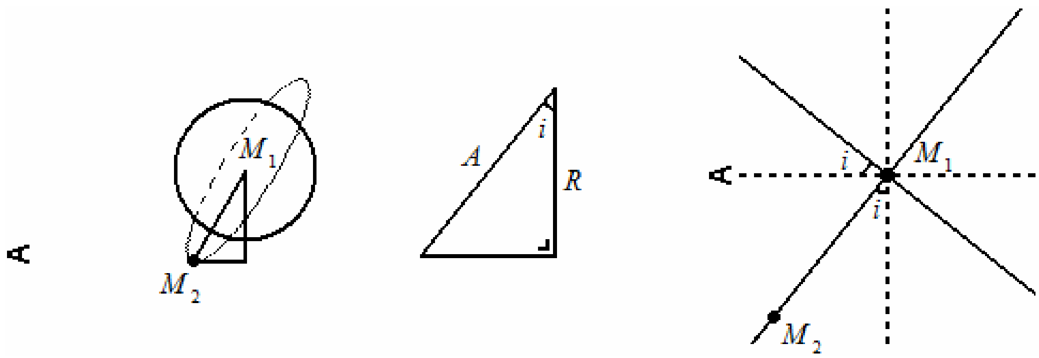
In werkelijkheid bedraagt de magnitudeverandering dus 1.31. Merk tenslotte op dat de gegevens slaan op het echt bestaand dubbelstersysteem Algol (β Persei), en dat de berekende resultaten exact overeenstemmen met wat effectief waargenomen wordt. In werkelijkheid werkt men uiteraard andersom, en is men wonderlijk genoeg in staat om uit de verandering in magnitude van een waargenomen lichtpuntje de fysische eigenschappen van dit dubbelstersysteem te bepalen.

Open Vragenreeks VII: Cygnus X-1

Nu gaan we de in de vorige vragenreeks opgedane kennis toepassen om te bewijzen dat het object Cygnus X-1 een zwart gat is. Gegeven is dat de dubbelster Cyg X-1 bestaat uit een zichtbare reus (M_1) met straal 20 $R_\odot$ en massa 30±10 $M_\odot$, en een onzichtbare component waarvan de massa M_2 onbekend is. Deze laatste zendt geen zichtbaar licht uit, en is dus geen gewone ster, maar een zogenaamd compact object. Men meet wel X-stralen uitgezonden in een gebied rond deze ster, en men vermoedt dat dit het gevolg is van de overdracht van materie van de reus naar de andere ster, die zich hierrond ophoopt in een zogenaamde accretieschijf. Deze X-straling wordt ononderbroken waargenomen, met andere woorden de kleine ster wordt nooit verduisterd door de grote. De rotatieperiode P bedraagt 5.6 dagen en je mag veronderstellen dat deze circulair is.

a) Toon via een schets aan welke beperkingen er zitten op de inclinatiehoek i. Hiervoor mag je er redelijkerwijs van uitgaan dat de massa van de onzichtbare component tussen de 0.1 en 100 $M_\odot$ zal liggen.

Beschouw de volgende situatie, waarbij de waarnemer (linksonder) het dubbelstersysteem waarneemt:



We definiëren het rechthoekig driehoekje bepaald door het middelpunt van de reus (M_1) en de in deze situatie onderste positie van de compacte ster M_2 (de afstand tussen beiden is *A*). In dit driehoekje komt de inclinatiehoek *i* voor, de hoek die de gezichtslijn maakt met de loodlijn op het vlak waarin de compacte ster beweegt rond de andere. Als we geen rekening houden met de zin waarin de beweging gebeurt (dit heeft voor dit probleem geen belang), dan geldt in elk geval dat $0° \le i \le 90°$. Voor een gegeven *A* wordt de grootst mogelijke waarde van *i* gevonden door de verticale zijde van het driehoekje gelijk te stellen aan *R*, de straal van de reus. Immers, wordt *i* nog groter, zodat deze zijde kleiner wordt dan *R*, dan zal de compacte ster vanuit het standpunt van de waarnemer wel voor de reus komen, en zal deze bijgevolg een halve periode later even achter de reus verdwijnen, leidend tot een verduistering van de accretieschijf. Dit wordt echter tegengesproken door de waarnemingen. De gezochte meest extreme waarde van *i* die mogelijk is, is dus een bovengrens.

De juiste waarde van *A* wordt via de derde wet van Kepler gevonden uit de periode *P*, maar is afhankelijk van de (onbekende) totale massa van het systeem. We weten echter dat deze ligt tussen de minimale massa van de reus plus de minimale massa van de compacte ster, en de maximale massa van de reus plus de maximale massa van de compacte ster:

$$A = \sqrt[3]{\frac{P^2\left(M_1 + M_2\right)}{4\pi^2/G}} \Rightarrow \begin{cases} A_{\text{min}} = 36.1\ \text{R}_{\text{zon}} \\ A_{\text{max}} = 68.9\ \text{R}_{\text{zon}} \end{cases}$$

Hoe groter *A*, hoe groter *i*. Bijgevolg zal de maximale waarde die *i* mogelijk kan aannemen gevonden worden door gebruik te maken van de maximale waarde van *A*:

$$\cos i = \frac{R}{A}$$

$$\Rightarrow \cos i_{\max} = \frac{R}{A_{\max}}$$

$$= \frac{20\ \mathrm{R}_{\mathrm{zon}}}{68.9\ \mathrm{R}_{\mathrm{zon}}}$$

$$\Rightarrow i_{\max} = 73.1°$$

b) Zoek op en leg kort uit hoe men komt aan het verband

$$\frac{\mathrm{PK}^3}{2\pi\mathrm{G}} = \frac{\mathrm{M}_2^3 \sin^3 \mathrm{i}}{(\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2)^2}$$

waarin K de radiële snelheid van de zichtbare ster is. In het geval van Cyg X-1 begraagt deze 70 km/s.

Betreffende formule, die bekend staat als de massafunctie, kan rechtstreeks worden afgeleid uit de derde wet van Kepler. Aangezien we een cirkelvormige baan veronderstellen wordt de maximale waarde die radiale snelheid kan aannemen gegeven door:

$$K = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi A}{P} \sin i$$

De $\sin i$-factor dient om in rekening te brengen dat we het systeem mogelijk niet van op de zijkant zien, en de ster dus niet recht naar ons toekomt of van ons af reist. Wanneer op bovenstaande formule de derde wet van Kepler wordt toegepast, en men bovendien weet dat $M_1 r_1 = M_2 r_2$, kan het geheel vereenvoudigd worden tot volgend eindresultaat:

$$\frac{PK^3}{2\pi G} = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2}$$

De formule impliceert dat de kleinst mogelijke waarde voor M_2 overeenkomt met de grootst mogelijke waarde voor *i*. Om deze te vinden moet dus de bekomen $i_{\max}$ ingevuld worden.

c) Gebruik de bovenstaande formule om in het meest extreme geval van inclinatiehoek de minimale massa van de onzichtbare component te bepalen. Tip: deze vergelijking analytisch oplossen is zeer moeilijk, je doet dit best grafisch of via een rekenblad.

Om werkelijk de kleinst mogelijke waarde van M_2 te vinden moet ook rekening gehouden worden met de fout op M_1. Hoe groter M_1, hoe groter M_2, dus moet de ondergrens van M_1 gebruikt worden. Dit levert via de formule uit (b) een eindresultaat voor de minimale waarde van $M_2 = 5.25\ \mathrm{M}_{\mathrm{zon}}$.

d) Leg uit waarom een compact object met dergelijke massa een zwart gat moet zijn.

Een compact object kan ofwel een witte dwerg, een neutronenster of een zwart gat zijn. Een eigenschap van compacte objecten is dat ze weinig of geen straling uitzenden. Zoals in het geval van Cyg X-1 is het wel mogelijk dat er zich een accretieschijf rond het object bevindt waarvan hoog energetische straling waargenomen wordt. De theoretische fysica (kwantummechanica) leert ons dat een witte dwerg, een ster die uit ontaarde elektronen bestaat, maximaal een massa van ongeveer 1.4 keer die van de zon kan hebben (de zogenaamde Chandrasekhar limiet). Wordt ze zwaarder dan dat, dan is ze niet langer in staat om zichzelf gravitationeel te ondersteunen en klapt ze in elkaar, bijvoorbeeld als een type Ia supernova. Voor neutronensterren bestaat een gelijkaardige bovengrens van ongeveer drie zonsmassa's. Een compact object dat nog zwaarder is, zoals de component van Cyg X-1, moet dus noodzakelijk een zwart gat zijn.